CONCOURS DE RECRUTEMENT

DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION

DE L'AVIATION CIVILE

ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée: 4 H.
Coef.: 4

- / -

On considère la fonction de la variable réelle x et dépendant du paramètre réel t tel que $|t| \leqslant 1$:

$$f_t(x) = (1-2xt + x^2)^{-1}$$

Lorsque $f_t(x)$ est développable en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$, par rapport à x, on se propose d'étudier les coefficients $P_n(t)$.

- I -

I.1 Poser $t=\cos\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, mettre en évidence les racines de l'équation $1-2x\cos\theta + x^2 = 0$ où x est l'inconnue, en déduire l'expression $Q_n(\theta)$ de $P_n(t)$ en fonction de θ ainsi que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$.

I.2 Retrouver $Q_n(\theta)$ et le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$ en étudiant la convergence et la somme des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\theta \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta.$$

I.3 Montrer que $|P_n(t)| \leqslant n+1$; déterminer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$ en justifiant le calcul ; montrer que $P_n(t)$ s'annule pour n valeurs distinctes de t comprises entre -1 et +1 exclus, et que les valeurs de t qui annulent $P_{n-1}(t)$ séparent celles qui annulent $P_n(t)$.

I.4 Démontrer que $P_n(t)$ est un polynome dont on précisera le degré, la parité ainsi que le coefficient de son terme de plus haut degré. (on ne demande pas à ce stade de déterminer tous les coefficients de $P_n(t)$).

T.S.V.P.

I.5 Etablir une relation entre $P_{n+1}(t)$, $P_n(t)$ et $P_{n-1}(t)$ en déterminant de deux manières le développement en série entière <u>par rapport à x</u> de la fonction

$$(1-2xt + x^2) \frac{d}{dx} f_t(x) ;$$

retrouver cette relation en étudiant l'expression

$$\sin(n+2)\,\theta + \sin n\,\theta.$$

- II -

II.1 Etudiant $P_n(t) \sin\theta$, établir que $P_n(t)$ est solution particulière pour $|t|<1$ de l'équation différentielle

$$E_n(t) : \qquad (1-t^2)\, y'' - 3ty' = -n(n+2)y$$

II.2 Déduire de $E_n(t)$ une équation différentielle $E_n(\theta)$ linéaire, du second ordre, dont les coefficients dépendent de θ et qui admet $Q_n(\theta)$ comme solution particulière pour $0<\theta<\Pi$.

II.3 z étant une fonction inconnue solution générale de $E_n(\theta)$ on pose $h = z \sin\theta$; établir une équation différentielle $H_n(\theta)$ linéaire, du second ordre, dont les coefficients sont constants et qui admet h comme solution générale pour $0<\theta<\Pi$.

II.4 Déterminer les fonctions inconnues h et les fonctions inconnues z solutions générales pour $0<\theta<\Pi$ respectivement de $H_n(\theta)$ et de $E_n(\theta)$; déterminer ensuite les fonctions inconnues y solutions générales de $E_n(t)$ pour $|t|<1$; reconnaître respectivement $Q_n(\theta)$ et $P_n(t)$ parmi ces fonctions z et ces fonctions y.

II.5 Déterminer directement à partir de $E_n(t)$, et donc sans tenir compte de II.4, les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ dont la somme est solution de cette équation et étudier la convergence de ces séries.

Montrer que l'ensemble de ces séries constituent un espace vectoriel sur le corps des réels dont on déterminera la dimension ; montrer que dans cet ensemble figurent des polynomes $S_n(t)$ dont on explicitera les coefficients ; en déduire les coefficients de $P_{2k}(t)$ et de $P_{2k-1}(t)$.

- III -

III.1 Pour $n = m$ et $n \neq m$, calculer l'intégrale

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} \quad P_n(t)\ P_m(t)\,dt.$$

III.2 y_n et y_m étant respectivement solutions, <u>quelconques</u>, des équations différentielles $E_n(t)$ et $E_m(t)$, déterminer une primitive de la fonction

$$\left[-n(n+2) + m(m+2)\right] \quad y_n y_m (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$$

III.3 Pour $n \neq m$, établir la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale

$$J_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} \quad y_n(t)\ y_m(t)\ dt,$$

et retrouver le résultat correspondant de III.1

- IV -

IV.1 Former l'équation différentielle du premier ordre dont la solution générale, pour $|t| < 1$, est la fonction

$$U_n(t) = C\ (1-t^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

C étant une constante réelle arbitraire.

IV.2 Dériver $(n+1)$ fois l'équation différentielle trouvée au IV.1 et en déduire une équation différentielle linéaire, du second ordre et dont les coefficients dépendent de t, qui admet comme solution particulière, pour $|t| < 1$, la fonction

$$V_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\ (1-t^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

IV.3 <u>En déduire</u> qu'alors la fonction

$$W_n(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad V_n(t)$$

est, pour $|t| < 1$, solution particulière de l'équation $E_n(t)$; s'appuyant simplement sur la nature des fonctions solutions de cette équation mise en évidence en II.4, montrer qu'il existe une constante C, telle que :

$$P_n(t) = C(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\ V_n(t)$$

IV.4 Remarquant que : $(1-t^2)^{n+\frac{1}{2}} = (1-t)^{n+\frac{1}{2}}(1+t)^{n+\frac{1}{2}}$

déterminer C.